

DOI: 10.16285/j.rsm.2019.0641

线性卸荷作用下软土超孔隙水压力 变化规律分析

师旭超, 孙运德

(河南工业大学 土木建筑学院, 河南 郑州 450001)

摘 要: 目前对软土在卸荷下的固结变形研究主要集中在瞬时卸荷。为明确线性卸荷作用下软土固结变形的规律, 通过太沙基一维固结理论与有效应力原理的方法, 研究了软土地基在任意卸荷速率下一维固结方程的通解, 并求解了线性卸荷下固结方程的解析解。结果表明, 线性卸荷作用下软土地基产生的负超孔压可以分成增长期、快速消散期和缓慢消散期 3 个阶段; 卸荷速率影响负超孔压的增长路径和消散速率而卸荷量影响最大负孔压值, 最大负超孔压值与卸荷量近似成线性增长关系; 最后结合工程实例进行对比分析, 发现卸荷导致的负超孔压值和其消散速率都在卸荷结束的时刻最大, 同时理论计算结果及变化规律与实测有较好的吻合性。

关 键 词: 岩土工程; 一维固结; 线性卸荷; 固结方程; 卸荷回弹; 负超孔压

中图分类号: TU 411.99

文献标识码: A

文章编号: 1000-7598 (2020) 04-1333-06

Analysis of the evolution of excess pore water pressure in soft soil under linear unloading

SHI Xu-chao, SUN Yun-de

(College of Civil Engineering and Architectural, Henan University of Technology, Zhengzhou, Henan 450001, China)

Abstract: At present, the research on the consolidation deformation of soft soil under unloading mainly focuses on the instantaneous unloading. In order to clarify the evolution of consolidation deformation of soft soil under linear unloading, through the one-dimensional consolidation theory of Terzaghi and the principle of effective stress, an effective method is proposed to study the general solution of the soft soil foundation under the arbitrary unloading rate and solve the analytical solution of the consolidation equation under linear unloading. The results show that: 1) the negative excess pore pressure generated in soft soil foundation under linear unloading can be divided into three stages: growth period, rapid dissipation period and slow dissipation period; 2) unloading rate affects the growth path and dissipation rate of negative excess pore pressure; 3) and unloading affects the maximum negative excess pore pressure with the unloading amount approximately linearly increasing. Finally, taking engineering examples for comparative analysis, it is found that the negative excess pore pressure and its dissipation rate induced by unloading are the highest at the end of unloading. The theoretical results with evolution trends are in good agreement with field measurements.

Keywords: geotechnical engineering; one-dimensional consolidation; linear unloading; consolidation equation; unloading rebound; negative excess pore water pressure

1 引 言

随着我国对基础建设的不断投入, 在许多工程中面临着对软土地基卸荷后的变形分析。软土地基卸荷下发生最明显的特征是回弹变形, 地基回弹变形与土中有效应力的变化密切相关。通过有效应力

原理可知, 充分认识到地基在卸荷下超孔隙水压力的变化规律, 是解决卸荷下地基回弹变形问题的关键^[1-5]。此前已有学者对卸荷作用下软土的变形研究已经取得了大量成果, 如李玉岐等^[6]发现坑底土体的膨胀隆起是由于基坑开挖产生的负孔压的消散导致坑底土体中的有效应力逐渐降低引起的; 陈善雄

收稿日期: 2019-04-07

修回日期: 2019-05-30

基金项目: 国家自然科学基金 (No. U1304526)。

This work was supported by the National Natural Science Foundation of China (U1304526).

第一作者简介: 师旭超, 男, 1973 年生, 博士, 教授, 主要从事岩土工程方面的研究工作。E-mail: haut2013@163.com

等^[7]通过卸荷三轴试验发现应力-应变关系受应力路径的影响, 并有较好的归一化特性; 周建等^[8]通过理论分析与试验发现孔压与主应变的关系与卸载路径关系密切; 林城福等^[9]通过一维加载压缩和卸荷回弹试验表明, 卸荷初期超孔压增长较快, 之后增长速率近似恒定不变; 郝玉龙等^[10-11]结合工程实例解释了超载卸荷后地基回弹变形小, 稳定快的现象和改进了卸荷下砂井区三维固结向一维固结等效转化的计算方法; 师旭超等^[12-13]通过试验得到淤泥在卸荷下回弹变形可分为 3 个部分和试样预压主固结结束时卸荷, 引起的吸水体积等于试样体积变化量; 章为明等^[14]通过试验得到了固结系数在加/卸载下不是一个固定常数的结论。

以上学者在理论上对线性卸荷下超孔隙水压力变化规律的分析探讨较少。本文基于太沙基一维固结理论推导出线性卸荷下一维固结解析解, 并将实际监测与理论值进行对比, 验证解析解的合理性, 以期对地基在卸荷下的回弹变形预测和使用维护提供参考。

2 卸荷作用下软土地基一维固结方程

2.1 太沙基一维固结理论

在外荷载 q 的作用下, 饱和土体发生渗流固结, 土骨架承担的有效应力 σ' 和孔隙水压力 u 承担的应力 (如图 1 中两个曲面部分) 是随时间 t 和深度 z 变化的函数, 假设在加载的瞬间, 外荷载完全由孔隙水压力 u 承担, 随着时间孔隙水压 u 逐渐开始消散, 有效应力 σ' 逐渐增加, 外荷载 q 逐渐由土骨架来承担, 直至超孔隙水压力 $u=0$ 。

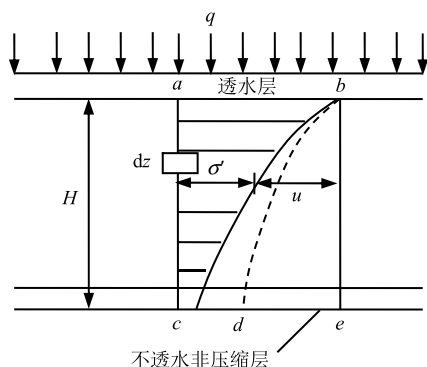


图 1 太沙基一维固结理论计算简图
Fig.1 Schematic of the one-dimensional consolidation theory of Terzaghi

图 1 表示饱和的软土层, 其厚度为 H , 并且在自重作用下已完成了固结。设土层表面受到均布荷载 q 的作用, 由它引起的附加应力 σ_z 深度均匀分

布, 并等于 p , 如图 1 中 be 线所示。饱和软土层上部是透水砂层, 下部是坚硬的不透水层, 在固结过程中, 土中的水只能从上面的透水砂层中排出。 bd 表示任意时间 t 土中有效应力 σ' 和超静孔隙水压力 u 沿深度 z 的变化曲线, 如图 1 中的虚线所示。有效应力 σ' 和孔隙水压力 u 为深度 z 和时间 t 的函数, 分别以 $\sigma' = \sigma'(z, t)$ 和 $u = u(z, t)$ 表示。

即孔隙水压力 $u = u(z, t)$ 的微分方程^[15]为

$$C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1)$$

2.2 卸荷下计算简图及相关假设

本例以任意卸荷速率为例, 介绍任意卸荷速率作用下饱和软土地基的一维固结基本方程。图 2 为计算简图。

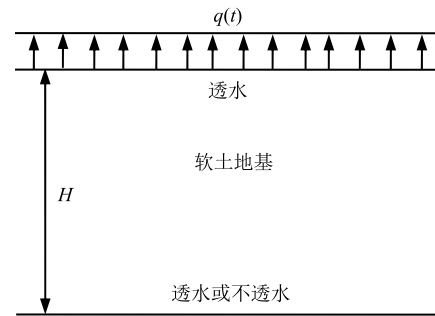


图 2 一维固结计算简图

Fig.2 One-dimensional consolidation calculation diagram

图 2 作用的荷载假定为大面积的均布荷载, 与太沙基一维固结理论假设相比, 除去作用在软土上的荷载情况外, 其余条件都与太沙基一维固结理论假设相同, 可推得软土在任意速率卸荷下的一维固结基本方程^[15]为

$$C_{ve} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - f(t) \quad (2)$$

由文献[10]可知 $C_{ve} = (5-10)C_v$, C_v 为土体加载下的固结系数, 可知加载固结系数不适用于卸荷, C_{ve} 如下式所示:

$$C_{ve} = \frac{k_v}{\gamma_w m_v} = \frac{k_v (1 + e_0)}{a_v \gamma_w} \quad (3)$$

式中: C_{ve} 为吸水固结系数 (m^2/s), 表示土体卸荷下产生的负超孔压消散速度大小的一个系数; $f(t)$ 为卸荷速率 (kPa), $f(t) = \frac{dq(t)}{dt}$; u 为孔隙水压力 (kPa); k_v 为土体卸荷渗透系数 (m/s); m_v 为体积回弹系数

(kPa^{-1}), $m_v = 1/E_n$, E_n 为回弹模量; γ_w 为孔隙液体重度 (kN/m^3); a_v 为回弹系数 (kPa^{-1}); e_0 为土体初始孔隙比。

一维固结基本方程 (2) 的初始边界条件为

$$\left. \begin{aligned} t=0, 0 \leq z \leq H \text{ 时, } u|_{t=0} &= u_0(z) \\ 0 < t < \infty, u|_{z=0} &= 0 \text{ (顶面排水)} \\ 0 < t < \infty \text{ 时, } \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=H} &= 0 \text{ (底面不排水)} \\ u|_{z=H} &= 0 \text{ (底面排水)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

2.3 任意卸荷速率下一维固结方程的通解

根据图 2 所示, 上表面排水, 下表面不排水为例。以傅里叶级数法和分离变量法相结合^[16], 并根据边界条件 (4), 求解任意卸荷速率下的一维固结基本方程 (2)。可假设孔压和卸荷速率为

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(t) \sin \frac{N}{H} z \quad (5)$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(t) \sin \frac{N}{H} z \quad (6)$$

由式 (6) 可得

$$X_n(t) = \frac{2}{H} \int_0^H f(t) \sin \frac{N}{H} z dz = \frac{N}{H} f(t) \quad (7)$$

$$N = \frac{2n-1}{2} \pi \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

将式 (5) 和式 (6) 代入方程 (2) 中可得

$$M'_n(t) + C_{vc} \frac{N^2}{H^2} M_n(t) - X_n(t) = 0 \quad (9)$$

令:

$$a = C_{vc} \frac{N^2}{H^2} \quad (10)$$

方程 (9) 通解为

$$M_n(t) = e^{-at} \left(\frac{2}{N} \int_0^t f(\tau) e^{a\tau} d\tau + C \right) \quad (11)$$

将式 (11) 代入式 (5) 并由式 (4) 第 1 式可知:

$$C = \frac{2}{H} \int_0^H u_0(z) \sin \frac{N}{H} z dz \quad (12)$$

故可求得解为

$$M_n(t) = e^{-at} \left[\frac{2}{N} \int_0^t f(\tau) e^{a\tau} d\tau + \frac{2}{H} \int_0^H u_0(z) \sin \frac{N}{H} z dz \right] \quad (13)$$

将式 (13) 代入式 (5) 得任意速率卸荷下的一

维固结基本方程 (2) 的通解为

$$u(z, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-at} \sin \frac{N}{H} z \left[\frac{2}{N} \int_0^t f(\tau) e^{a\tau} d\tau + \frac{2}{H} \int_0^H u_0(z) \sin \frac{N}{H} z dz \right] \quad (14)$$

3 线性卸荷作用下软土地基一维固结解析解

荷载 $q(t)$ 以线性卸荷, 荷载具体随时间的变化情况如图 3 所示。

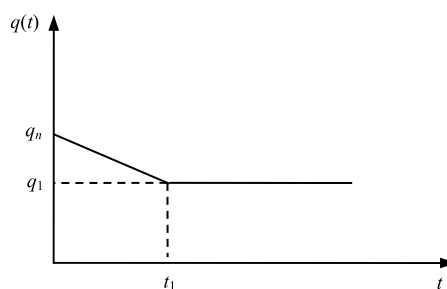


图3 荷载-时间变化曲线

Fig.3 Curve of load versus time

$$q(t) = \begin{cases} \frac{q_1 - q_n}{t_1} t + q_n & 0 \leq t \leq t_1 \\ q_1 & t_1 \leq t \end{cases} \quad (15)$$

式中: q_n 为历史作用荷载量; q_1 为卸荷后荷载量; t_1 为卸荷结束时间。

其各时间段的应力条件为

$$f(t) = \begin{cases} \frac{q_1 - q_n}{t_1} & 0 \leq t \leq t_1 \\ 0 & t_1 \leq t \end{cases} \quad (16)$$

其各时间阶段的孔隙水压力的连续条件为

$$u_1(t=t_1) = u_2(t=t_1) \quad (17)$$

令各阶段的卸荷速度为

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= \frac{q_1 - q_n}{t_1} = k & 0 \leq t \leq t_1 \\ f_2(t) &= 0 & t_1 \leq t \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中: k 为卸荷速度。

令初始孔隙水压力 $u_1(z) = q_0$, 将各阶段卸荷速度式 (18) 代入式 (14), 并由式 (4) 和式 (17) 可知, 线性卸荷下软土地基的一维固结表达式为(其中, H 为最大排水距离, 在单面排水条件下为土层

厚度, 双面排水条件为土层厚度的一半):

$$u(z, t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-at}}{N} \left[\frac{k}{a} (e^{at} - 1) + q_0 \right] \sin\left(\frac{N}{H} z\right) & 0 \leq t \leq t_1 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-at}}{N} \left[\frac{k}{a} (e^{at_1} - 1) + q_0 \right] \sin\left(\frac{N}{H} z\right) & t_1 \leq t \end{cases} \quad (19)$$

由有效应力原理以及回弹量与有效应力的关系, 可知回弹量的解析解为

$$S(t) = \begin{cases} -\frac{H}{E_n} \left\{ kt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_0}{N^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-at}}{N^2} \left[\frac{k}{a} (e^{at} - 1) + q_0 \right] \right\} & 0 \leq t \leq t_1 \\ -\frac{H}{E_n} \left\{ q_1 - q_n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2q_0}{N^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2e^{-at}}{N^2} \left[\frac{k}{a} (e^{at_1} - 1) + q_0 \right] \right\} & t_1 \leq t \end{cases} \quad (20)$$

从线性卸荷下孔压的解析解式 (19) 中可以看出, 卸荷下产生的超孔隙水压力是由卸荷速率、卸荷量、吸水固结系数以及初始孔压共同作用的结果, 本文中的负超孔压值为卸荷过程中某时刻的超孔隙水压力值与卸荷初始时的超孔隙水压力值的差值。通过 Matlab 对式 (19) 进行编程, 并对有关参数赋值, 令 $q_0 = 0$; $C_{ve} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$; $H = 20 \text{ m}$, 其余参数是变量, 其结果如图 4 和图 5 所示。

从图 4 可以看到: 当卸荷速率 $k < 2 \text{ kPa/d}$ 时最大负超孔压值与卸荷量无关; 在卸荷量一定时, 卸荷速率 k 对最大负超孔值的影响存在临界值 k_1 和 k_2 , 当 $k < k_1$ 时产生的最大负超孔值很小甚至为 0, 这是由于卸荷产生的负超孔压在卸荷过程中就消散了, 当 $k_1 < k < k_2$ 卸荷导致的最大负超孔值随着卸荷速率的增大而增大, 当 $k_2 < k$ 时卸荷速率的增大对最大负超孔值没有影响, 这是由于卸荷太快, 负超孔压来不及消散就卸荷就完成了, 即 $k_2 < k$ 时相当于瞬时卸荷; 在卸荷速率一定时, 卸荷导致的最大负超孔压值与卸载量近似线性关系, 随其增大而增加; 在其他条件一定时, 卸荷量越大对应的临界速率 k_2 越大。

从图 5 可以看到: 卸荷速率影响负超孔压的消散速率, 其随着卸荷速率的增大而增大; 卸荷速率影响负超孔压的增长路径而卸荷量影响着最大负孔压值; 在卸荷下产生的负超孔压, 其随时间的变化可以分成增长期、快速消散期和缓慢消散期 3 个阶段。

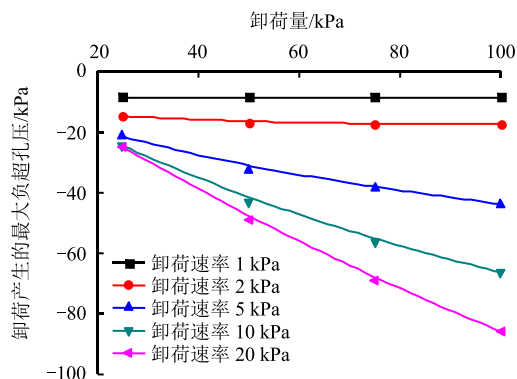


图 4 不同卸荷量和卸荷速率导致的最大负超孔压
Fig.4 Maximum negative excess pore pressure induced by different unloading levels and rates

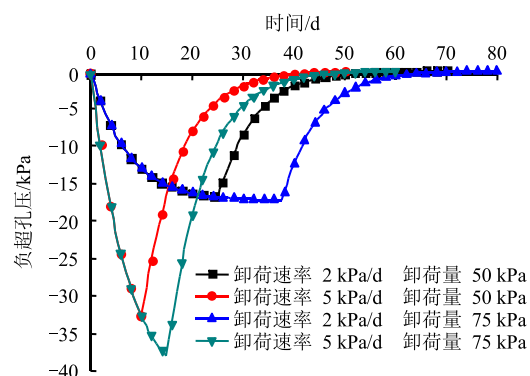


图 5 不同卸荷量和卸荷速率导致的负超孔压随时间的变化
Fig.5 Negative excess pore pressure induced by different unloading levels and rates with time

4 实例分析

某民用机场工程^[11], 其跑道地基为国内典型的软黏土地基, 机场场区范围内软黏土层比较均匀。对于机场跑道软黏土地基施工单位准备采用袋装砂井预压方案进行加固处理, 砂井深为 20 m, 砂井直径为 0.14 m, 间距为 1.4 m, 采用梅花形布置, 其跑道地基预压的均布荷载 82.65 kPa, 然后跑道地基在此荷载下预压 187 d, 最后卸载到 54.87 kPa, 具体的卸荷曲线如图 6 所示, 实测点和计算点选在机场跑道中心位置。

由于在实际中地基的卸载后吸水固结是三维的, 通过郝玉龙等^[11]的等效计算方法可知, 砂井区的三维固结可以等效转化为一维固结来计算, 通过计算可得砂井区等效的一维竖向固结系数为 $C_v = 7.34 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 通过林城福等^[9]的室内卸载试验可知 $C_{ve}/C_v = 9.3$, 即卸荷时的吸水固结系数 $C_{ve} = 6.85 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$. 计算深度取为 20 m, 排水条件取双面排水。

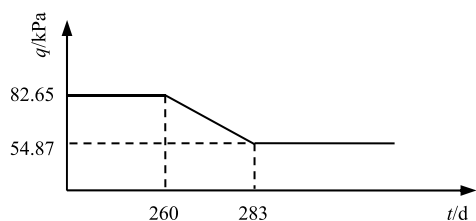


图6 机场地基的卸载曲线

Fig.6 Unloading schedule of airport foundation

图7显示了民用机场工程^[11]地基根据公式(19)所得卸荷过程中及卸荷结束后一段时间内负超孔压随着时间和深度变化的三维图像。可以看出在卸荷过程中随着卸荷的开始负超孔压逐渐增大直到卸荷结束的时刻达到最大值;由于卸荷的速率一定而负超孔压增加的越来越慢,说明卸荷过程中负超孔压的消散速度是逐渐增大的;在卸荷结束后负超孔压的消散速度逐渐开始减小,说明卸荷结束的时刻是负超孔压消散速度最快的时刻;卸荷结束后负超孔压消散的速度很快,在很短时间内基本上已经消散,但是完全消散需要较长时间,正好与主回弹和次回弹对应;由于超孔隙水压力消散是因为地基的吸水造成的,说明卸荷后土体的吸水回弹变形大部分会很快完成,同时说明式(19)可以预测卸荷后地基吸水回弹持续的时间。

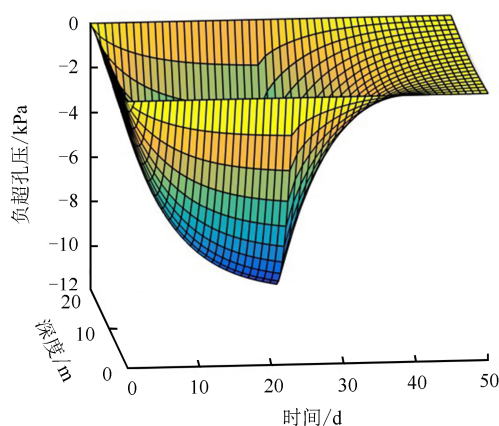


图7 负超孔压随时间和深度的变化

Fig.7 Evolution of negative excess pore water pressure with time and depth

图8展示了不同时间负超孔压理论值及实测值的对比。可以看出理论值比实测值普遍偏大,但是两者有相同的变化规律而且很吻合。说明式(19)可以用来预测地基在卸荷作用下某一时间、某一深度负超孔压值。

图9显示的是不同时间回弹量理论值与实测值的对比。从图中可以看出,地基的回弹变形自卸荷

开始时就进行,回弹速度明显先增大后减小,在283 d即卸荷结束的时刻回弹速度最大,这与负的超孔隙水压力消散过程相对应,说明卸荷作用下地基的回弹量及回弹速度与卸荷下产生负的超孔隙水压力及其消散速度密切相关;通过理论值与实测值的对比可以看出,地基回弹量的实测值与计算值比较吻合且有相同的变化规律,说明式(20)可以用来预测地基在卸荷作用下某一时刻的回弹量。

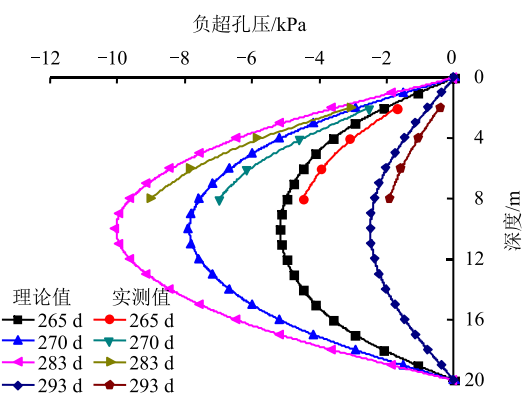


图8 不同时刻负超孔压理论值与实测值对比

Fig.8 Comparison of theoretical and calculated values of negative excess pore water pressure at different times

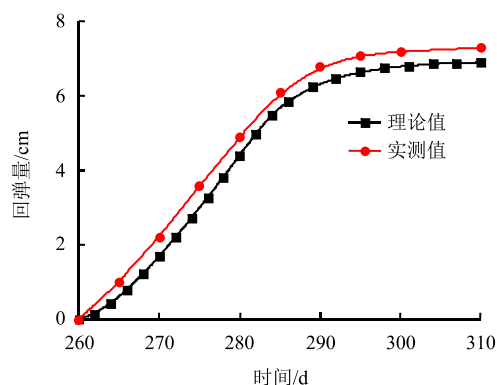


图9 卸荷下回弹量理论值与实测值对比

Fig.9 Comparison of theoretical and measured results of swelling under unloading

5 结 论

(1) 本文通过太沙基一维固结理论,推导出任意卸荷速率下的一维固结方程的通解,并给出了线性卸荷下固结方程的解析解。

(2) 在卸荷速率一定时,卸荷导致的最大负超孔压值与卸荷量近似成线性增长关系。在卸荷量一定时,卸荷速率 k 对最大负超孔压值的影响存在临界值 k_1 和 k_2 。卸荷速率影响负超孔压的增长路径和消散速率,而卸荷量影响着最大负孔压值。

(3) 卸荷作用下软土地基产生的负超孔压随时间的变化可以分成增长期、快速消散期和缓慢消散期 3 个阶段。回弹量及回弹速度与负的超孔隙水压力及其消散速度密切相关。

(4) 通过工程实例对软土地基在卸荷下引起的超孔隙水压力进行对比分析, 发现理论值及变化规律与实测有较好的吻合性, 说明推导的卸荷下孔压的解析解具有实际的工程意义。

参考文献

- [1] WANG G J, TAKEMURA J KUWANO. Evaluation of excess pore water pressures of intermediate soils due to cyclic loading by energy method[J]. **Computer Methods**, 1997, 25(3): 81-87.
- [2] MESRI G, ULLRICH C R, CHOI Y K. The rate of swelling of over consolidated clays subjected to unloading[J]. **Géotechnique**, 1978, 28(3): 281-307.
- [3] HIROYUKI TANAKA. Unloading behavior of clays measured by CRS test[J]. **Soils and Foundations**, 2014, 54(2): 81-93.
- [4] XIE K H, XIE X Y, JIANG W. A study on one-dimensional nonlinear consolidation of doublelayered soil[J]. **Computer and Geotechnics**, 2002, 29(2): 151-168.
- [5] 雷俊. 卸荷作用下软土回弹变形及孔隙水压力变化规律的试验研究[D]. 武汉: 武汉科技大学, 2010.
LEI Jun. Experimental study on springback deformation and pore water pressure variation of soft soil under unloading[D]. Wuhan: Wuhan University of Science and Technology. 2010.
- [6] 李玉岐, 魏婕, 谢康和. 负孔压消散对坑底的回弹影响研究[J]. 长江科学院院报, 2005, 22(4): 52-55.
LI Yu-qi, WEI Jie, XIE Kang-he. Study on the effect of negative pore pressure dissipation on the spring back of the bottom[J]. **Journal of Yangtze River Scientific Research Institute**, 2005, 22(4): 52-55.
- [7] 陈善雄, 凌平平, 何世秀, 等. 粉质黏土卸荷变形特性试验研究[J]. 岩土力学, 2007, 28(12): 2534-2537.
CHEN Shan-xiong, LING Ping-ping, HE Shi-xiu, et al. Experimental study on unloading deformation characteristics of silty clay[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2007, 28(12): 2534-2537.
- [8] 周健, 王浩, 蔡宏英, 等. 软土卸载孔压特性的试验与理论计算分析[J]. 岩土工程学报, 2002, 24(5): 556-559.
ZHOU Jian, WANG Hao, CAI Hong-ying. Experimental and theoretical analysis of pore pressure characteristics of unloaded soft soil[J]. **Journal of Geotechnical Engineering**, 2002, 24(5): 556-559.
- [9] 林城福, 雷国辉. 一维回弹试验中卸载条件下的负超孔隙水压力响应[J]. 岩土力学, 2017, 38(12): 3613-3618.
LIN Cheng-fu, LEI Guo-hui. Negative super Pore water response under unloading condions in one-dimensional rebound test[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2017, 38(12): 3613-3618.
- [10] 郝玉龙, 古力. 超载预压地基卸载后吸水固结及回弹变形的研究[J]. 岩石力学与工程学报, 2005, 24(5): 883-888.
HAO Yu-long, GU Li. Study on water absorption consolidation and rebound deformation after unloading of overload preloading foundation[J]. **Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2005, 24(5): 883-888.
- [11] 郝玉龙, 陈云敏, 王军. 深厚软土未打穿砂井超载预压地基孔隙水压力消散规律分析[J]. 中国公路学报, 2002, 15(2): 36-39.
HAO Yu-long, CHEN Yun-min, WANG Jun. Analysis of pore water pressure dissipation regularity of overload preloading foundation in deep soft soil without punching sand well[J]. **China Journal of Highway and Transport**, 2002, 15(2): 36-39.
- [12] 师旭超, 汪稔, 韩阳. 卸荷作用下淤泥变形规律的试验研究[J]. 岩土力学, 2004, 25(8): 1259-1262.
SHI Xu-chao, WANG Ren, HAN Yang. Experimental study on deformation law of silt under unlodingeffect[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(8): 1259-1262.
- [13] 师旭超, 韩阳. 卸荷作用下软黏土回弹吸水试验研究[J]. 岩土力学, 2010, 31(3): 733-736.
SHI Xu-chao, HAN Yang. Experimental study on rebound water absorption of soft clay under unloading[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2010, 31(3): 733-736.
- [14] 章为明, 顾行文, 王芳. 土的卸荷回弹试验及其时间过程的计算方法[J]. 岩土工程学报, 2015, 37(6): 979-986.
ZHANG Wei-ming, GU Hang-wen, WANG Fang. Calculation method of unloading rebound test and time process of soil[J]. **Chinese Journal of Geotechnical Engineering**, 2015, 37(6): 979-986.
- [15] 卢延浩, 刘斯宏, 刘祖德, 等. 土力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
LU Yan-hao, LIU Si-hong, LIU Zu-de, et al. Soil mechanics[M]. Beijing: Higher Education Press, 2010.
- [16] ASMAR Nakhle H. 偏微分方程教程[M]. 陈祖墀, 宣本金译. 北京: 机械工业出版社, 2006.
ASMAR NAKHLE H. Partial differential equations[M]. Translated by CHEN Zu-yu, XUAN Ben-jin. Beijing: Mechanical Industry Press, 2006.